Traitement des signaux déterministes - Transformée De Fourier - Distributions

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2023-2024

Transformée de Fourier au sens des distributions

Définition

$$\boxed{\left\langle \widehat{f}, \varphi \right\rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle}$$

Espace de Schwartz

Avec cette définition, l'espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ n'est pas stable par transformée de Fourier.
Il faut donc prendre un autre espace de fonctions qui soit stable par transformée de Fourier.
On définit donc l'espace de Schwartz :

$$\boxed{\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \left| x^n f^{(k)}(x) \right| \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0 \right\}}$$

Distributions tempérées

$$\boxed{\mathcal{S}'(\mathbb{R}) = \{T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \text{ linéaire et continue}\}}$$

Avec ces définitions, S est stable par transformée de Fourier :

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \left\langle \widehat{T}, \varphi \right\rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle}$$

Transformée de Fourier : distribution régulière

$$\boxed{\widehat{g}(u) = \left\langle T, e^{-2i\pi ux} \right\rangle}$$

Transformée de Fourier : distribution de Dirac

$$\boxed{\widehat{\delta}(u) = F_u^-(\delta) = \left\langle \delta, e^{-2i\pi ux} \right\rangle = e^{-2i\pi u0} = 1}$$

$$\boxed{\widehat{\delta}_a(u) = F_u^-(\delta_a) = \left\langle \delta_a, e^{-2i\pi ux} \right\rangle = e^{-2i\pi ua}}$$

Dérivée n-ième de la transformée de Fourier

$$\boxed{(\widehat{f})^{(n)}(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n} \left(f(x) e^{-2i\pi ux} \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(-2i\pi x\right)^n e^{-2i\pi ux} \mathrm{d}x}$$

Distribution régulière associée à une fonction

Soit f une fonction à croissance lente et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors :

$$\boxed{\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x}$$

Distribution régulière associée à une fonction constante

$$\boxed{F_u^-(T_c) = c\delta_0}$$

$$\boxed{F_u^-(T_c') = 2i\pi u F_u^-(T_c) = 0}$$

Transformée de Fourier d'une distribution de $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\widehat{f}(\overrightarrow{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\overrightarrow{r}) e^{-2i\pi \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}} \mathrm{d}\overrightarrow{r}}$$